Soal ON MIPA-PT Matematika

Tahun 2018

Tingkat Nasional

Olimpiade Nasional MIPA Perguruan Tinggi 2018

Bidang Matematika
Hari Pertama
5 Mei 2018
Waktu: 4 jam

Petunjuk pengerjaan:

1. Tes ini terdiri dari 5 soal, tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumentasi dan penjelasan.
2. Setiap soal bernilai 10 angka.
3. Anda boleh menyelesaikan soal yang mana pun sesuka Anda.
4. Tuliskan nomor tes Anda pada setiap lembar jawaban. Jangan tuliskan nama atau universitas asal Anda.
5. Gunakan pena atau pulpen. Pensil hanya boleh digunakan untuk gambar atau sketsa.
6. Jika tempat yang tersedia tidak mencukupi, gunakan halaman di belakangnya.
7. Bekerjalah dengan cermat dan teliti. Anda sama sekali tidak diperkenankan menggunakan penghapus cair.
8. Di akhir tes, kumpulkan berkas soal ini secara utuh.

Nomor tes: ____________

1. Diberikan bilangan asli n. Cari semua bilangan bulat yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}\right)$$

untuk suatu bilangan kompleks $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ dengan $|z_1| = \cdots = |z_n| = 1$.

Nomor tes: ____________

2. Misalkan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dengan $k_1, k_2, \cdots, k_n \in \mathbb{R}^n$ adalah vektor-vektor kolom dari A. Vektor-vektor kolom tersebut memenuhi hubungan

$$k_i = (i+2)k_{i+2},$$

dengan $i = 1, 2, \cdots, (n-2)$.

Untuk $n > 3$, pilihlah satu nilai eigen A kemudian tentukan dimensi terkecil yang mungkin untuk ruang eigen dari nilai eigen yang terpilih.

Nomor tes: ____________

3. Untuk bilangan bulat positif $n \geq 1$, definisikan h_n sebagai banyaknya cara menuliskan n sebagai jumlahan dari bilangan 1 dan 2 dengan memperhatikan urutan kemunculan bilangan 1 dan 2. Sebagai contoh $h_3 = 3$, karena $3 = 1+1+1$, $3 = 2+1$, dan $3 = 1+2$. Selanjutnya $h_4 = 5$, karena $4 = 1+1+1+1$, $4 = 1+1+2$, $4 = 1+2+1$, $4 = 2+1+1$, dan $4 = 2+2$. Buktikan bahwa untuk $k \geq 0$

$$h_{2k+1} = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \binom{k-i}{j} \binom{k-j}{i}.$$

Nomor tes: ___________

4. Diberikan fungsi kontinu $f : [0, \infty) \to [0, a]$, untuk suatu bilangan real $a > 0$, dan f memenuhi *the intermediate value property* pada $[0, \infty)$. Jika $f(0) = 0$ dan $xf(x) \geq \int_0^x f(t)dt$, untuk semua $x \in (0, \infty)$, buktikan bahwa f mempunyai anti derivatif.

Nomor tes: ____________

5. Diberikan bilangan prima p dan bilangan asli $n \geq 3$. Misalkan

$$G_n(p) := \{x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{Z}_p\}.$$

Definisikan operasi $\circ$ di $G_n(p)$ melalui $P \circ Q = P(Q(x))$ modulo x^{n+1}. Sebagai contoh di $G_3(5)$, misalkan $P = x + 2x^2$ dan $Q = x + 3x^2$. Maka

$$\begin{aligned} P \circ Q &= (x + 3x^2) + 2(x + 3x^2)^2 \\ &= x + 3x^2 + 2(x^2 + 6x^3 + 9x^4) \\ &= x + 5x^2 + 12x^3 + 18x^4 \\ &= x + 5x^2 + 12x^3 \text{(karena modulo } x^4\text{)} \\ &= x + 2x^3 \text{(karena koefisiennya di } \mathbb{Z}_5\text{)} \end{aligned}$$

Periksa apakah $G_n(p)$ merupakan grup terhadap operasi $\circ$.

Olimpiade Nasional MIPA Perguruan Tinggi 2018

Bidang Matematika
Hari Kedua
6 Mei 2018
Waktu: 4 jam

Petunjuk pengerjaan:

1. Tes ini terdiri dari 5 soal, tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumentasi dan penjelasan.
2. Setiap soal bernilai 10 angka.
3. Anda boleh menyelesaikan soal yang mana pun sesuka Anda.
4. Tuliskan nomor tes Anda pada setiap lembar jawaban. <u>Jangan</u> tuliskan nama atau universitas asal Anda.
5. Gunakan pena atau pulpen. Pensil hanya boleh digunakan untuk gambar atau sketsa.
6. Jika tempat yang tersedia tidak mencukupi, gunakan halaman di belakangnya.
7. Bekerjalah dengan cermat dan teliti. Anda sama sekali <u>tidak</u> diperkenankan menggunakan penghapus cair.
8. Di akhir tes, kumpulkan berkas soal ini secara utuh.

Nomor tes: ____________

1. Diberikan bilangan bulat tak negatif k dan n sehingga $0 \leq k < n$. Berikan bukti kombinatorial bahwa
$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n-1-j}{k-j} 2^j.$$

Nomor tes: ____________

2. (a) Apakah $\langle x + 2018 \rangle$ merupakan ideal prima di $\mathbb{Z}[x]$?

   (b) Apakah $\langle x + 2018 \rangle$ merupakan ideal maksimal di $\mathbb{Z}[x]$?

Nomor tes: ____________

3. Misalkan barisan bilangan real $\{x_n\}$ terbatas dan memenuhi $x_{n+2} \leq \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}), \forall n \geq 0$. Jika $A_n = \max\{x_n, x_{n+1}\}$, buktikan:

   (a) barisan $\{A_n\}$ konvergen

   (b) barisan $\{x_n\}$ konvergen

Nomor tes: ____________

4. Buktikan atau beri contoh penyangkal

   (a) Untuk setiap fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jika fungsi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan definisi

   $$g(x) = f(x^{2018}), \ \forall x \in \mathbb{R},$$

   mempunyai deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ yang konvergen di suatu persekitaran $x = 0$ maka f mempunyai turunan di $x = 0$.

   (b) Untuk setiap fungsi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, jika fungsi $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dengan definisi

   $$g(z) = f(z^{2018}), \ \forall z \in \mathbb{C},$$

   mempunyai deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ yang konvergen di suatu persekitaran $z = 0$ maka f mempunyai turunan di $z = 0$.

Nomor tes: ____________

5. Diberikan bilangan asli n. Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ dengan $\det(A) = a + d = 1$. Jika $A^n = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$, maka tentukanlah $a' + d'$.